

VEKTOREN, BETRÄGE UND SKALARPRODUKT

Bei diesen Aufgaben geht es darum, physikalische Probleme mit Hilfe der Vektorrechnung zu lösen. Dabei treten auch Skalarprodukte auf.

[H1] Segelflug **[5 Punkte]**

Von einem Berggipfel bei \vec{r}_1 wird ein kleiner Modell-Segelflieger gestartet. Er segelt mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} und kommt dabei einer Kirchturmspitze im Tal bei \vec{r}_2 bedenklich nahe. Welche Position $\vec{r}_2 + \vec{R}$ und welche Distanz R hat er im gefährlichsten Moment? Versuchen Sie, eine Formel für \vec{R} zu finden, die nur die Vektoren \vec{v} und $\vec{\rho} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ enthält. Für eine konkrete Rechnung sei

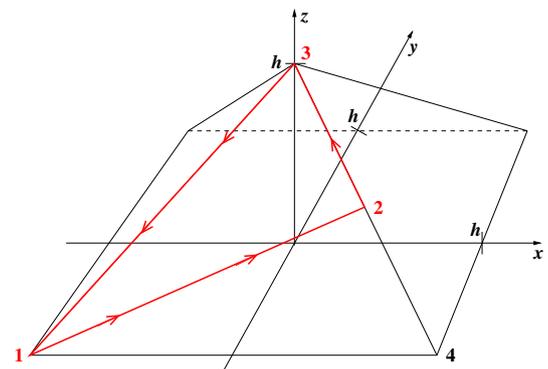
$$\vec{r}_1 \doteq 100 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m}, \quad \vec{r}_2 \doteq \begin{pmatrix} 900, 3 \\ 198, 8 \\ -199, 6 \end{pmatrix} \text{ m} \quad \vec{v} \doteq \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Hinweis: Am einfachsten geht es durch das Bilden geeigneter Linearkombinationen. Wer das Kreuzprodukt bereits kennt, kann \vec{R} aber auch als ein zweifaches Kreuzprodukt schreiben. Zur Kontrolle: $R = 1,3 \text{ m}$.

[H2] Cheops-Pyramide **[5 Punkte]**

Ein Tourist erklettert die Cheops-Pyramide, die die Höhe h und eine quadratische Grundfläche mit der Basislänge $2h$ hat.^a Sein Weg führt ihn von Punkt 1 geradewegs zu dem auf halber Höhe liegenden Punkt 2, von dort zur Spitze^b bei Punkt 3. Von dort kehrt er direkt zum Anfangspunkt 1 zurück. Bei gleichmäßig 10 m/min benötigt er für seinen Rundweg 59 Minuten. Wie hoch ist die Pyramide?

Hinweise: Man gebe zunächst die Ortsvektoren \vec{r}_i der drei Punkte $i = 1, 2, 3$ in Komponentendarstellung an, dann $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ usw. Zu Zahlenwerten gehe man so spät wie möglich über. Trigonometrie ist hier weder nützlich noch erlaubt!



^aDas stimmt nicht wirklich. Die Cheops-Pyramide hat derzeit eine Basislänge von etwa $\frac{5}{3}h$, aber das macht die Rechnung nur unnötig schwer.

^bDie Cheops-Pyramide hat keine echte Spitze mehr, sie war ursprünglich etwa 8 m höher.

[H3] Meteoriteneinschlag? **[5 Punkte]**

Die Astronomen haben einen kleinen Asteroiden entdeckt, der offenbar vom Gravitationsfeld des Mondes eingefangen wurde. Erste Beobachtungen ergaben, dass er sich mit großer Geschwindigkeit \vec{v} am Ort \vec{r}_A in der Nähe des Mondes \vec{r}_M bewegt. Wir legen den Koordinatenursprung in den Erdmittelpunkt und verwenden für die Längen als Einheit den Erddurchmesser. Es sei

$$\vec{v} \doteq \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\text{s}}, \quad \vec{r}_A \doteq \begin{pmatrix} 29 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_M \doteq \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Geschwindigkeit ist also in ihrer Richtung bekannt, aber in ihrem Betrag nur bis auf eine reelle Konstante $\alpha > 0$. In welcher Ebene wird der Asteroid voraussichtlich bleiben? Bis auf welche Entfernung Δ kann er schlimmstenfalls der Erdoberfläche nahe kommen? Können Sie für Δ eine Formel für allgemeines \vec{v} angeben?

HINWEIS

Bitte geben Sie unbedingt auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an!